

La physique du bruit

Vincent Croquette

23 mars 2009

Lorsque l'on mesure un signal plusieurs sources de bruits viennent perturber le signal.

- ▶ Le bruit intrinsèque du système.
Si la chaîne d'acquisition est bien conçue c'est lui seul qui doit limiter la mesure.
- ▶ Le bruit de la chaîne d'amplification.
Tous les amplificateurs donne un signal de bruit à leur sortie même si ils n'ont aucun signal à leur entrée. Il faut adapter l'amplificateur pour que son bruit propre soit minimal par rapport au signal.
- ▶ Le bruit de numérisation
C'est le bruit que l'on peut introduire par les repliements de spectre, on le supprime en insérant des filtres avant de numériser.

Les bruits intrinsèques d'un système physique

Les systèmes physiques que nous utilisons mesure une grandeur associée à un grand nombres de particules physiques.

- ▶ Les bruits de nature thermodynamique.
Ils sont généralement associés aux mouvements thermiques des particules. Ces bruits ont leur intensité proportionnelle à la température absolue. (Exemple bruit de tension au borne d'une résistance).
- ▶ Les bruits associés à la nature corpusculaire de la matière.
Si nous regardons un flux de particules, dans la mesure ou leurs mouvements sont décorrélés, il apparaît un bruit de type grenaille. Ce bruit est indépendant de la température. (Par exemple le bruit de la pluie].
- ▶ Les bruits en $1/f$.
Un grand nombre de phénomènes naturels présentent des fluctuations dont le spectre croît comme $1/f^\alpha$ (La hauteur d'eau d'un fleuve par exemple).

Toutes les variables thermodynamiques présentent des fluctuations thermiques :

- ▶ Fluctuations de tension aux bornes d'une résistance.
- ▶ Mouvement Brownien.
- ▶ Fluctuations de pressions.
- ▶ etc.

La prédictions de ces fluctuations reposent sur deux relations :

- ▶ La relation d'Einstein
- ▶ Le théorème fluctuations dissipation

La relation d'Einstein

Nous dit que chaque degré de liberté voit son énergie moyenne égale à $\frac{1}{2}k_B \cdot T$ avec $k_B = \frac{R}{N_a} = 1.3806210^{-23} \text{ J/K}$.

Si nous mesurons la position x d'un objet, celui-ci est maintenu par une structure ayant une certaine raideur k . La position x présentera des fluctuations δx telles que :

$$\frac{1}{2}k \cdot \langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B \cdot T$$

Si nous considérons le dipôle constitué par une résistance R en parallèle avec un condensateur C , ce circuit RC voit à ses bornes des fluctuations de tensions δV telles que :

$$\frac{1}{2}C \cdot \langle \delta V^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B \cdot T$$

- ▶ Attention la relation d'Einstein s'applique dans l'espace réel et suppose que la variable fluctuante ne présente **aucun filtrage** (c'est souvent faux dans une expérience).

Le théorème fluctuation dissipation

Il nous dit qu'on peut décrire les fluctuations d'un système par une perturbation aléatoire f_n appliquée à celui-ci. Dans l'espace de Fourier, f_n est un bruit blanc qui est filtré par la réponse spectrale du système. Ce théorème relie les fluctuations thermodynamiques du système aux éléments dissipatifs qu'il contient, c'est-à-dire que f_n ne dépend que de ses éléments dissipatifs.

Si nous considérons deux exemples : celui du circuit RC et celui d'une micro-bille plongée dans liquide visqueux (de l'eau) et attachée à un ressort. Le théorème fluctuation dissipation nous dit que l'élément responsable des fluctuations est celui qui dissipe l'énergie. En l'occurrence, R pour le circuit RC et le coefficient de friction visqueuse $6\pi\eta.r$ pour la micro-bille.

Ceci peut apparaître en contradiction avec la relation d'Einstein qui nous dit que ces fluctuations sont relié à C et k qui sont les éléments non dissipatifs.

Equation du mouvement :

$$k.x(t) + 6\pi\eta.r\dot{x}(t) = F_L(t)$$

Où la fonction d'autocorrélation de $F_L(t)$ est telle que $\langle F_L(t).F_L(0) \rangle = \delta(t)$ soit $\tilde{F}_L(\omega) = cte..$

Nous cherchons à calculer $F_L(t)$ en utilisant la relation d'Einstein :

$$\frac{1}{2}k. \langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B.T$$

. TF de l'équation de mouvement : $k.\tilde{x} + i\omega 6\pi\eta.r\tilde{x} = \tilde{F}_L$

soit $\tilde{x} = \frac{\tilde{F}_L}{k+i\omega 6\pi\eta.r}$ ou encore $\tilde{x}^2 = \frac{\tilde{F}_L^2/k^2}{1+\omega^2/\omega_c^2}$ avec $\omega_c = \frac{k}{6\pi\eta.r}$

Théorème de Parseval nous permet de calculer $x^2(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} \tilde{x}^2(\omega) d\omega \quad (\omega \geq 0 \text{ car } x(t) \text{ réel})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{F_L^2}{k^2} \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^2} d\omega = \frac{F_L^2}{k^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \omega_c dy. \text{ Avec } y = \frac{\omega}{\omega_c} \text{ et } dy = \frac{d\omega}{\omega_c}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \omega_c \frac{F_L^2}{k^2} [\text{artg}(y)]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{F_L^2}{k \cdot 6\pi\eta r} = \frac{k_B T}{k}$$

$$\tilde{F}_L^2(\omega) = \frac{2}{\pi} (6\pi\eta r) \cdot k_B T \text{ ou } \tilde{F}_L^2(f) = 4(6\pi\eta r) \cdot k_B T$$

Pour le circuit RC on obtient :

$$\tilde{E}_n^2(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot R \cdot k_B T \text{ ou } \tilde{E}_n^2(f) = 4 \cdot R \cdot k_B T$$

L'équation de gauche est la densité de bruit par pulsation, celle de droite la densité de bruit par Hertz.

Fluctuations de positions en fonction de la raideur.

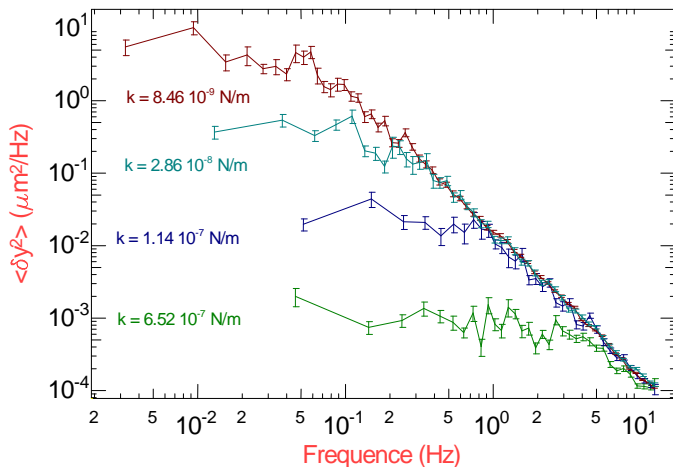


Figure: Fluctuations browniennes de la bille en fonction de la raideur k du ressort. A basses fréquences, l'amplitude des fluctuations est reliée à k . A hautes fréquences, c'est le frottement visqueux qui limitent les fluctuations.

Force de Langevin en fonction de la raideur.

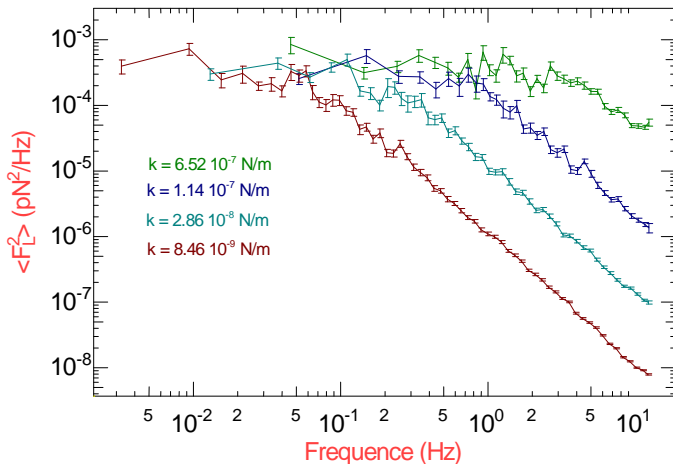


Figure: Force de Langevin déduites des fluctuations de position multipliées par la raideur du ressort k . Comme la force de Langevin ne dépend que des frottements visqueux, celle-ci est indépendante de k . Par contre la bande passante du système dépend de k .

Bruit RMS et bande passante.

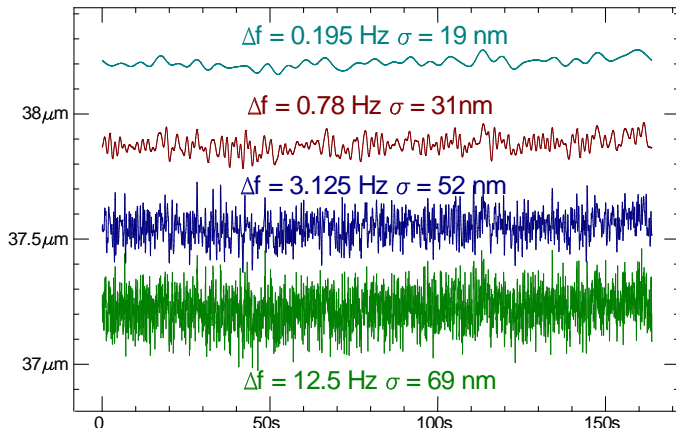


Figure: Relation entre la bande passante Δf d'un signal (ici un mouvement brownien $f_c = 4\text{Hz}$) et ses excursions RMS. On a $\sigma \propto \sqrt{\Delta f}$. Ici un même signal a été représenté avec un filtrage variable (décalé pour plus de clarté) .

La force de Langevin F_L ou le bruit de tension au borne d'une résistance E_n sont en fait des densités de bruit dans l'espace de Fourier. Leurs unités sont respectivement des $\text{pN}/\sqrt{\text{Hz}}$ et $\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. Pour comparer des bruits expérimentaux il faut comparer leur densité de bruit spectrale. La valeur du bruit RMS (Root Mean Square) dans l'espace directe est souvent trompeuse, les bandes passantes sont rarement les mêmes et ceci est difficile à diagnostiquer sur le signal.

Une façon de comparer les signaux dans l'espace réel est de les filtrer pour assurer qu'ils ont la même bande passante.

Mesure de force en utilisant le mouvement Brownien

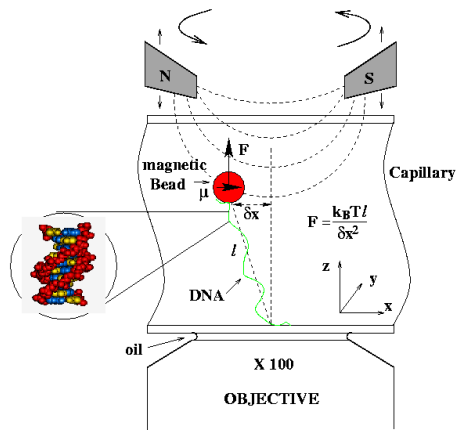


Figure: Principe de la mesure de Force. $\langle x^2 \rangle$ nous permet d'estimer la raideur k . Or $k = F/l$. On peut également mesurer le frottement visqueux en mesurant f_c ou τ_c . C'est une méthode de calibration de force basés uniquement sur des mesures de distances.

Calibration des AFM et des pinces optiques.



Bruit d'une résistance R .

Une résistance $R \Rightarrow$ générateur de bruit $\tilde{E}_n^2(f) = 4.R.k_B T$ si on regarde le signal dans l'espace direct, $E_n^2(t) = 4.R.k_B T \Delta f$.

La plupart des détecteurs sont de nature électronique avec un amplificateur branché sur un capteur. Celui-ci peut être modélisé par une résistance (éventuellement une impédance). La valeur de cette résistance et sa température définissent ainsi le niveau de bruit du système.

Ordre de grandeur : $R = 10k\Omega$ et $T = 300^\circ K$ correspondent à $12 nV/\sqrt{Hz}$, pour une 50Ω qui est l'impédance caractéristique des câbles coaxiaux cela correspond à $0.82 nV/\sqrt{Hz}$.

Oscilloscope $R = 1M\Omega$, $C = 10pF \Rightarrow \Delta f = 16kHz$ correspond à $\approx 15\mu V$ de bruit RMS. $R = 50\Omega$, $\Delta f = 1GHz$ correspond à $\approx 26\mu V$.

Fréquence maximale : $\hbar\omega = k_B T$, correspond à l'infrarouge a Température ambiante. A très basse température on peut voir la coupure en fréquence $25mK \Rightarrow 1GHz$.

Bruit d'une résistance R , mesure de température

En mesurant le bruit d'une résistance avec un ampli de faible bruit on peut déterminer sa température. Ce n'est pas le thermomètre le plus sensible mais il est sa calibration est absolue.



Figure: En 1965, Penzias et Wilson à Bell Labs. ont utilisé cette technique pour mesurer le bruit d'une antenne micro-onde pointée vers le ciel. Penzias et Wilson ont mis au point un détecteur dont le bruit intrinsèque est remarquablement petit.

Ils observent un bruit qu'ils n'arrivent pas à expliquer. Ils finiront par trouver que c'est le vestige électromagnétique du Big-Bang, le rayonnement à $3^{\circ}K$. (Leur détecteur avait donc une température de bruit équivalente bien inférieure à cette température.)

Penzias et Wilson ont ainsi validé la théorie du Big-Bang, ils ont reçu le prix Nobel.

Les bruits de type grenaille (shot noise)

Si vous regardez des voitures passer sur l'autoroute à faible densité de circulation, le temps de passage des voitures suit presque une loi de Poisson. Si vous cherchez à estimer, le débit de voiture par un comptage par unité de temps, votre estimation va présenter un bruit notable lié à la racine carré du nombre de voitures, c'est le bruit de grenaille. Il est caractérisé par $\sigma_I^2 \propto I$

On rencontre ce type de bruit dans beaucoup de systèmes :

- ▶ Un courant d'électrons dans le vide
- ▶ La mesure d'un flux lumineux
- ▶ Un courant électrique passant à travers une barrière de potentiel (diode).
- ▶ etc.

Ce bruit fut découvert par Schotky

Les bruits de type grenaille dans les courants électriques

Dès qu'un dispositif contrôle le flux des électrons, le passage d'une barrière de potentiel par exemple, on observe du bruit de grenaille. Il accompagne le courant d'électrons et prend la forme :

$$i_n^2(t) = 2I.e.\Delta f \text{ ou } i_n^2(f) = 2I.e$$

C'est un bruit blanc en fréquence. Il est indépendant de la température. Il permet de déterminer la charge du porteur e . Pour un courant de $1\mu A$ le bruit correspond à $0.6pA/\sqrt{Hz}$. Si on regarde le signal issu d'un Photo-Multiplicateur ou d'une photo-diode à avalanche, chaque fois qu'un photon ou qu'un électron déclenche le dispositif, N électrons l'accompagnent. Le bruit de grenaille est alors renforcé.

$$i_n^2(f) = 2(n.q).q = 2nq^2 \text{ où } q = N.e$$

Autres exemples de bruit de grenaille

La plupart des détecteurs de lumière sont limités par le bruit de photons. Certains détecteurs permettent de suivre les photons arrivant un par un.

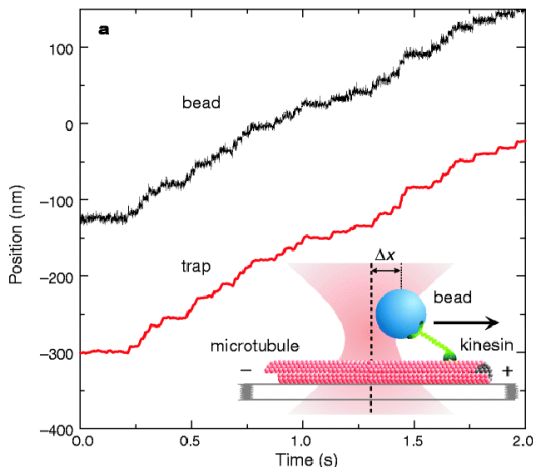


Figure: Déplacement d'un moteur moléculaire : la kinésine le long d'un microtubule. Ce moteur fait des pas de 8 nm dont la distribution de probabilité est une loi de Poisson. Les fluctuations de position correspondent à l'intégrale d'un bruit de grenaille.

La corrélation entre événements réduit le bruit de grenaille

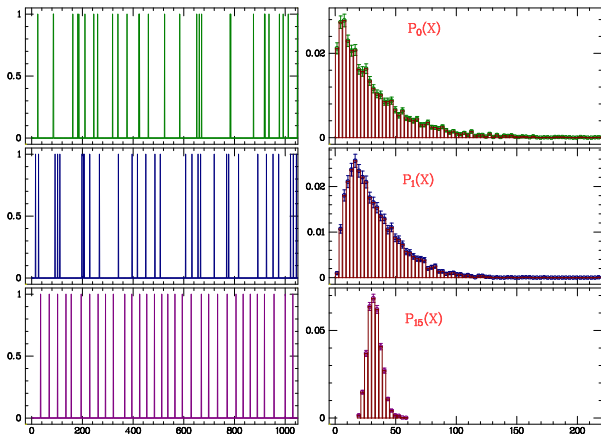


Figure: A gauche, simulation d'un flux d'événements passant d'une situation aléatoire pure (distribution de Poisson (vert)) à une situation presque périodique (magenta). A droite, histogramme des temps de passage entre les événements.

La corrélation entre événements réduit le bruit de grenaille

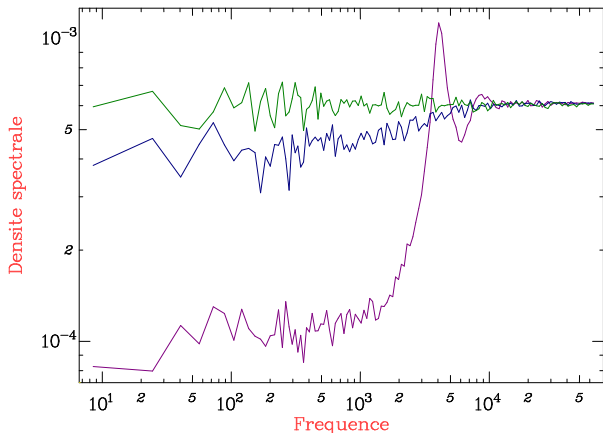


Figure: Spectre de bruit des simulations précédentes. Lorsque le flux d'événements correspond à situation aléatoire pure (distribution de Poisson (vert)) la densité de bruit est blanche. Pour la situation presque périodique (magenta) le bruit de grenaille est réduit à basse fréquence.

Il n'y a pas de bruit de grenaille dans un pont de résistances

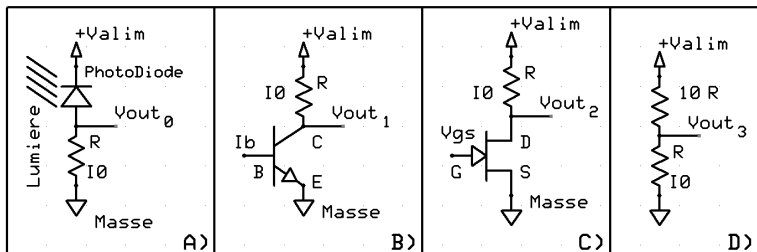


Figure: Schéma de quatre montages dans lesquels le même courant I_0 traverse une résistance R mais dont la tension de sortie V_{out} ne présente pas le même bruit. Dans les trois premiers (A,B,C) le courant est limité par un élément semiconducteur qui laissent passer les charges une par une, le courant I_0 présente un bruit de grenaille. Pour le cas D), la résistance $10R$ est beaucoup plus grande que R , elle est choisie pour laisser passer le même courant I_0 à partir de la tension V_{alim} . Cette fois il n'y a pas de bruit de grenaille!

$$V_{out_{1,2,3}}^2 = (4k_B T \cdot R + 2I_0 \cdot e \cdot R) \Delta f \quad V_{out_4}^2 = (4k_B T \cdot R) \Delta f$$

Le bruit dans la chaîne d'amplification

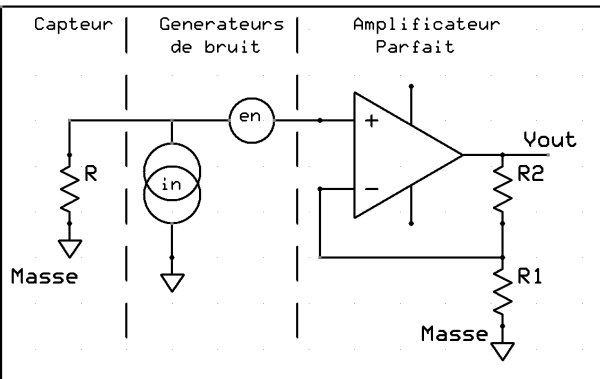


Figure: Schéma de principe d'une chaîne d'amplification. Le capteur est modélisé par une résistance R attachée à un amplificateur. Celui-ci est décomposé en un amplificateur parfait et en deux générateurs de bruit l'un en tension e_n et l'autre en courant i_n .

Court-circuit $R = 0$, l'ampli présente un bruit e_n^2 .
Si R est très grand le bruit de l'ampli est $\propto R^2 i_n^2$.

$$V_{out}^2 = G^2 (e_n^2 + R^2 i_n^2 + 4k_B T \cdot R) \cdot \Delta f$$

Minimisation du bruit de l'amplificateur

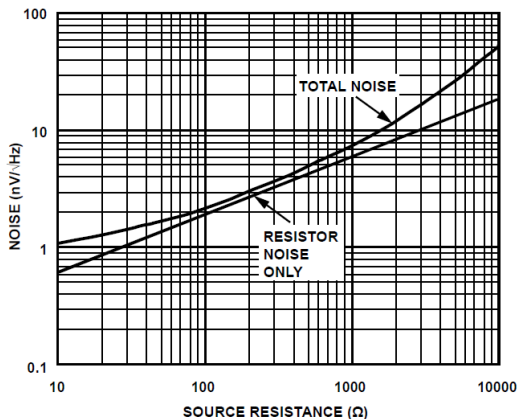


Figure: Bruit d'un capteur de résistance R relié à un amplificateur opérationnel AD797. Si R est très petit, c'est le bruit de tension e_n qui domine, si R est très grand c'est la contribution en bruit de courant $R \cdot i_n$ qui domine. Pour un e_n et i_n donné, il y-a une résistance optimum $R_o = e_n/i_n$.

On caractérise un amplificateur par sa Figure de bruit. Pour le AD797, $e_n = 1\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ et $i_n = 5\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}$

$$F = \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}} = \frac{(e_n^2 + R^2 i_n^2 + 4k_B T.R)}{(4k_B T.R)} = 1.6 \text{ (2dB) pour } R_o = 200\Omega$$

Température de bruit d'un amplificateur

On peut aussi définir la température de bruit d'un amplificateur. C'est son bruit avec une résistance R_0 à son entrée dans le cas où la température de cette résistance est nulle. On décrit alors le bruit du dispositif comme celui de la résistance R_0 à une température T_A . Un bon amplificateur a une température de bruit petite. Pour le AD797, $e_n = 1nV/\sqrt{Hz}$ et $i_n = 5pA/\sqrt{Hz}$

$$T_A = \frac{(e_n^2 + R^2 i_n^2)}{(4k_B \cdot R)} = 183K \text{ pour } R_0 = 200\Omega$$

pour le AD 745, $e_n = 3.2nV/\sqrt{Hz}$ et $i_n = 6.9fA/\sqrt{Hz}$,
 $R_0 = 464k\Omega$

$$T_A = \frac{(e_n^2 + R^2 i_n^2)}{(4k_B \cdot R)} = 0.807K \text{ pour } R_0 = 464k\Omega$$

L'AD797 a un premier étage avec des transistors NPN, l'AD745 utilise des JFET.

Physique des générateurs de bruit d'un amplificateur

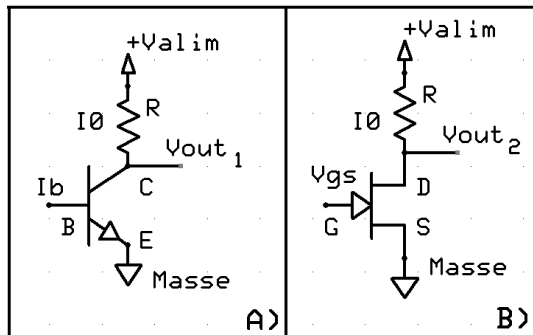


Figure: Le premier étage d'un amplificateur est constitué soit d'un transistor à jonctions soit d'un JFET. Ces éléments contrôlent le passage du courant I_0 par la tension à la base ou au gate.

Le bruit de tension e_n est induit par le shot noise sur I_0 . Ces transistors ont un courant de polarisation I_b ou I_g dont le bruit shot noise est la source du i_n . Transistors : grande transconductance e_n petit. I_b important (μA). i_n important. JFET : transconductance modérée e_n moins bon. I_g très petit (pA) i_n très petit.

Comportement en fréquence du bruit d'un amplificateur

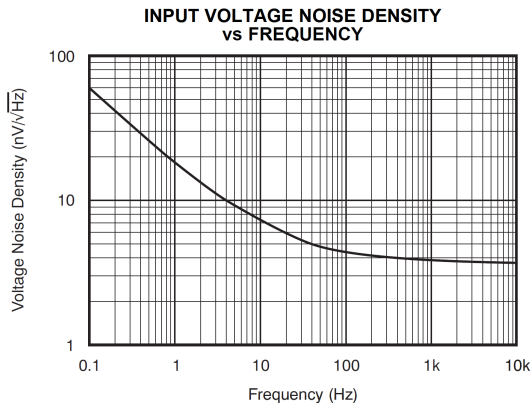


Figure: *Evolution du bruit en tension e_n d'un amplificateur à JFET. On remarque que le bruit est constant à hautes fréquences mais qu'il augmente continuellement à basse fréquence.*