Correction de l'examen

V. CROQUETTE

du 8 avril 2009 9h30, durée 2 heures

Résumé

Les quatre sections sont indépendantes, la difficulté des questions va crescendo dans chaque section, les premières sont très proches du cours et demandent une réponse courte, les dernières font appel à une réflexion personnelle.

1 Spectre d'un oscillateur

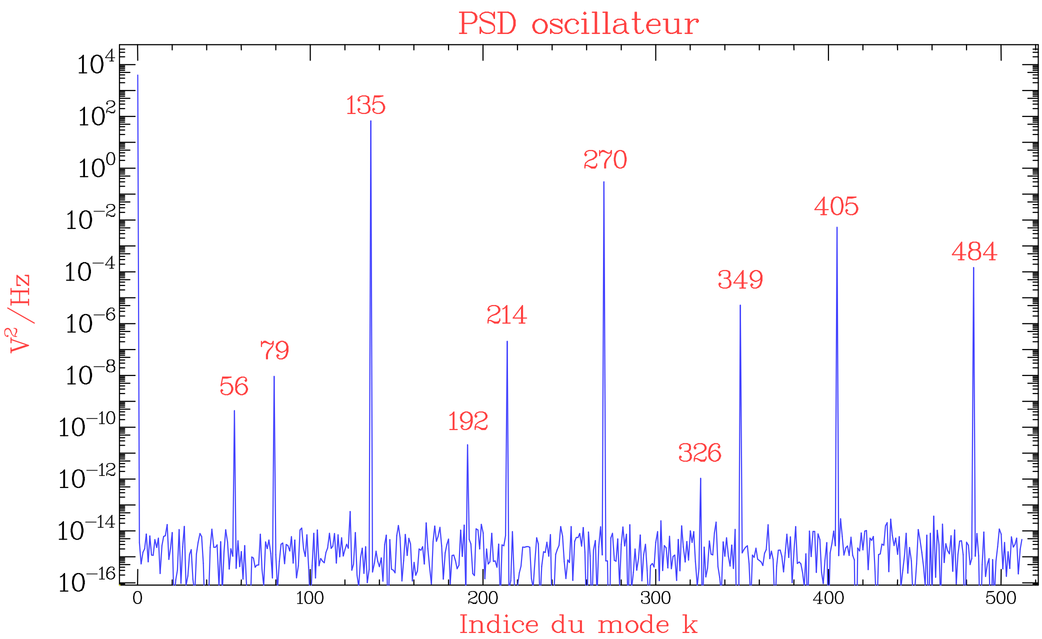

FIGURE 1 – *Spectre de l'oscillation d'un oscillateur réalisé sur un échantillon de 1024 points. Nous avons représenté la puissance spectrale en fonction de l'indice du mode de Fourier.*

On mesure le spectre d'un oscillateur 1 à partir de 1024 points échantillonnés à 1024 Hz.

1. A quoi correspond le pic à 135 ? *Au fondamental*
2. A quelle fréquence correspond-t-il ? *à* $135 \times 1024Hz/1024 = 135$ *Hz*
3. Quelle est la fréquence maximale mesurable avec cet échantillon ? *c'est la fréquence de Nyquist* $f_n = N_0/2$ *= 512 Hz*.
4. A quoi correspondent les pics à 270 et 405 ? *Aux hamoniques 2 et 3*.
5. L'oscillateur est-il linéaire ? *NON : un oscillateur linéaire n'a pas d'harmonique ! Le calcul des harmoniques à partir des termes non-linéaires est fait dans le polycopié "Introduction au Chaos".*
6. Cet oscillateur est-il chaotique ? *Non : son spectre ne contient que des pics fins.*
7. A quoi correspond probablement le pic à 484 ? *A l'harmonique 4*. Justifiez : $4 \times 135 = 540$ *cette fréquence est plus grande que la fréquence de Nyquist (512 Hz) donc elle est "aliasée" c'est-à-dire combinée avec* $f_e = 1024$ *Hz ;* $484 = 1024 - 4 \times 135$.
8. A quoi correspondent probablement les pics à 349, 214 et 79 ? *Aux harmoniques 5, 6 et 7*. Justifiez : $f_n = 1024 - (n \times 135)$.

9. A quoi correspondent probablement les pics à 56, 192 et 326 ? *Aux harmoniques 8, 9 et 10*. Justifiez $f_n = (n \times 135) - 1024$.
10. Quel conseil donnez vous à l'opérateur qui a fait ce spectre ? *D'utiliser un filtre passe-bas avant de numériser son signal supprimant les fréquences > 400 Hz*.

2 Les limites de la déconvolution d'une image floue

Dans le cours nous avons montré qu'il était possible de déconvoluer une image floue pourvu que l'on connaisse précisément la nature de ce flou. C'est-à-dire le moyennage fait sur chaque pixel comme celui décrit dans la figure 2 en haut au milieu qui correspond à un moyennage sur une gaussienne $F(x) = exp(-(x^2/2a^2)$ de largeur a. Nous avons choisi une gaussienne pour la simplicité du calcul. En effet la TF d'une gaussienne $F(x)$ est : $\tilde{F}(k) = A_0.exp - (2\pi^2 a^2 k^2/N_0^2)$ (ou A_0 est une constante et N_0 est le nombre de points dans une direction de l'image ici $N_0 = 256$).

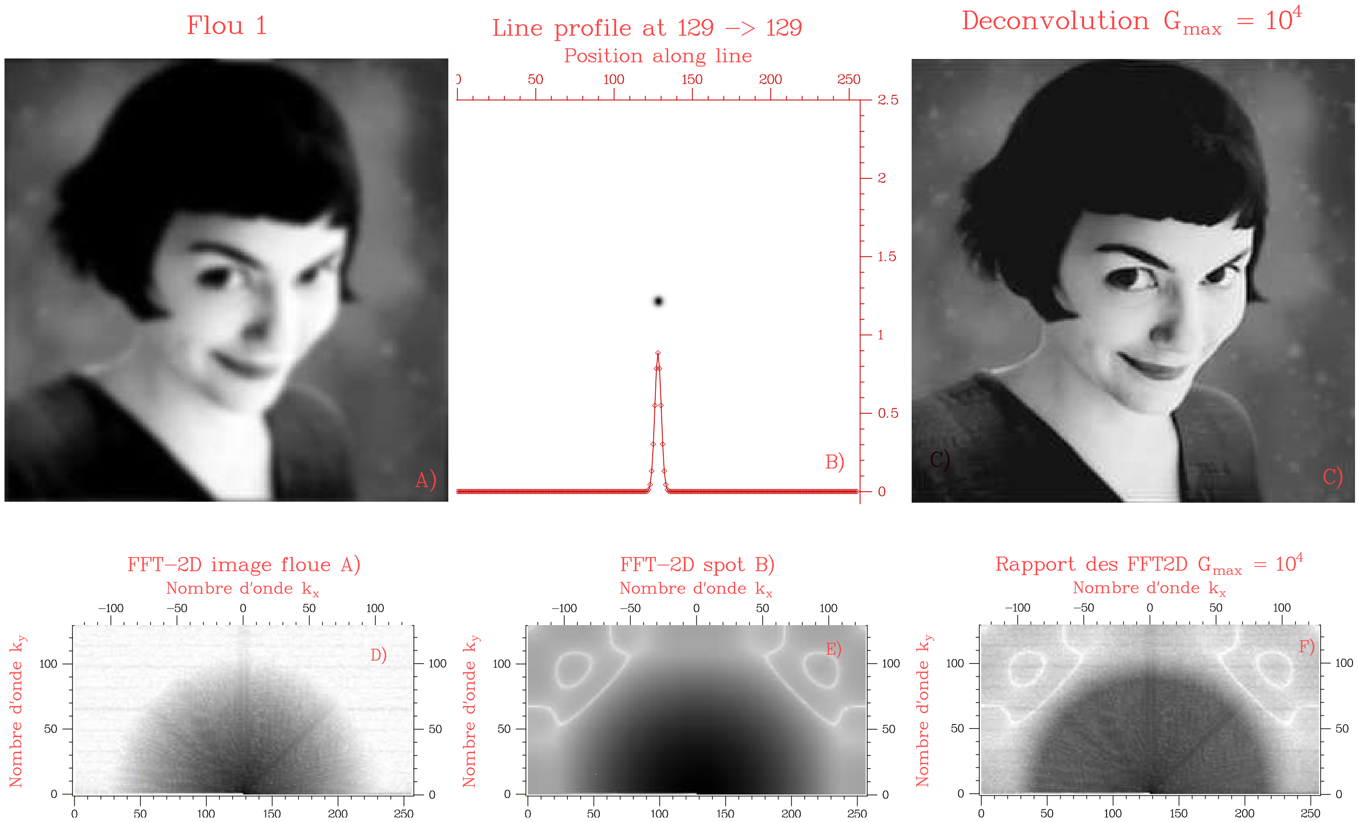

FIGURE 2 – *Principe de la deconvolution. En haut à gauche A), image floue de $N_0 \times N_0$ pixels ayant subie une convolution par le profil gaussien représentée en haut au milieu B) ($N_0 = 256$). En bas à gauche D) TF de l'image floue, en bas au milieu E) TF de la gaussienne ayant servie à faire le flou. A droite en bas F) TF de l'image déconvoluée, en haut à droite C) image déconvoluée. Pour toutes les TF le noir de l'image correspond au logarithme de l'intensité des modes de Fourier. Un mode intense est noir un mode très faible apparaît blanc.*

Dans l'exemple du cours les données des images sont codés sur des nombres "flottants" sur 32 bits, dans un appareil photo classique, le codage est fait sur des entiers compris entre 0 et 255 (8 bits).

1. A quelle opération de filtrage correspond la convolution de l'image originale par la gaussienne $F(x)$? *A un filtre passe bas. En effet, convoluer par une gaussienne dans l'espace réel revient à multiplier par une gaussienne dans l'espace de Fourier. Cette multiplication atténue les modes d'autant plus que leur nombre d'onde est grand.*
2. Comment ce filtrage évolue-t-il lorsque a (la largeur de la gaussienne) augmente ? *Plus a est grand dans l'espace réel, plus l'image est floue et plus le filtrage est fort.*
3. Rappeler le principe de la déconvolution : comment est obtenue la TF de l'image déconvoluée (figure 2 en bas à droite F)) ? *Pour déconvoluer, il faut passer dans l'espace de Fourier où la déconvolution devient une division. L'image F) est obtenue en divisant l'image D) par la E)*
4. Comment obtient-on l'image déconvoluée (figure 2 en haut à droite C)) ? *En faisant la transformée de Fourier inverse de F)*

5. Qu'est ce qui limite l'opération de déconvolution ? *Lors de la déconvolution, on divise par une gaussienne. Dès que cette gaussienne devient petite, l'opération revient à amplifier les modes de Fourier de l'image floue. Dès qu'on amplifie une donnée expérimentale celle-ci contient du bruit, la déconvolution va amplifier aussi le bruit.*
6. Quel est l'indice k des modes de Fourier les plus affectés par cette opération ? *Les modes de nombre d'onde les plus grands c'est-à-dire* $k = N_0/2$.
7. En quoi le codage sur 8 bits joue un rôle dans cette limitation ? *Si l'image floue a été codée sur 8 bits cela veut dire que sa dynamique est restreinte : un pixel a une valeur* $\in [0, 256]$. *Lors de la convolution, si un mode est atténuée d'un facteur plus grand que 256 le codage sur 8 bits le remplace par zéro, il y a alors une perte d'information irréversible.*
8. En considérant les modes les plus affectés, estimez la largeur maximale a_m de la gaussienne dont on pourra déconvoluer le flou sans perdre d'information (on négligera les arrondis des opérations faites sur les entiers). *Il va y avoir une dégradation irréversible lorsque* $\tilde{F}(N_0/2) = 1/256 = exp(-\pi^2 a^2/2)$ *soit* $a = 1.06$. *La gaussienne dans l'espace directe mélange alors juste 2 pixels ! en fait l'oeil accepte un peu de dégradation et il est possible d'aller un peu plus loin (a* $\approx 2, 3$*) mais guère plus.*

3 Nombre de photons par pixel sur une caméra CCD

On cherche à calibrer une caméra CCD d'usage courant (JAI-AV10), celle-ci délivre pour chaque pixel un signal S variant de 0 à 255 (8 bits) proportionnel au niveau de lumière reçu 60 fois par seconde. On éclaire cette caméra par une LED dont on règle la puissance de sortie entre 0 et 100 (unités arbitraires). Pour un éclairage (homogène) donné, on mesure la valeur moyenne du signal $< S >$ par pixel ainsi que la variance de ce signal $< (S- < S >)^2 >$. Les résultats sont donnés sur la figure 3. Si la caméra était parfaite, le signal S serait proportionnel au nombre de photons n qui sont convertis en électrons dans chaque pixel : $S = \alpha.n$. On se propose de déterminer α.

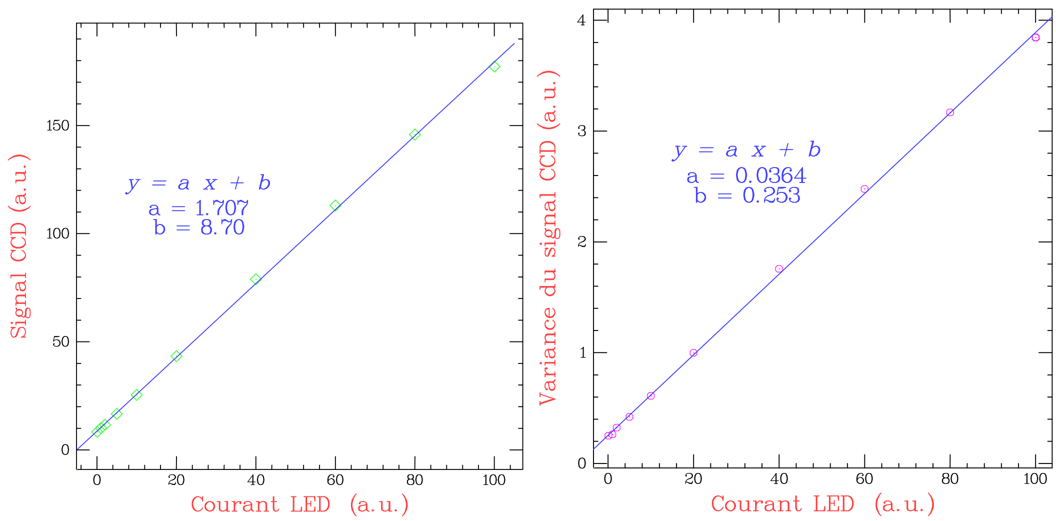

FIGURE 3 – *A gauche, signal moyen mesuré par pixel en fonction de l'intensité d'éclairage. On observe que le signal de sortie est linéaire avec l'intensité d'éclairage. Comme la caméra ne peut produire qu'un signal positif, le signal CCD est légèrement décalé et présente une valeur non nulle (ici 8.7) quand la caméra est dans le noir. A droite, variance de ce signal.*

1. Dans l'hypothèse où la caméra est parfaite (elle n'introduit pas de bruit), d'où provient le bruit mesuré ? *c'est le bruit de photons qui est un bruit de type grenaille.*
2. Comment celui-ci dépend-t-il de la température ? *comme tous les bruits de grenaille, le bruit de photons est indépendant de la température.*
3. Exprimez la variance du signal en fonction de α et n. *var(S)=* $\alpha^2 n$ *ou l'écart type* $\sigma = \alpha\sqrt{n}$.
4. Est-il utile d'utliser un convertisseur analogique digital de plus de 8 bits ? *Lorsque le signal est maximum, sa variance vaut presque 4 donc l'écart type est de 2 tandis que le signal atteint 170, le rapport signal sur bruit est typiquement de 1% ce qui est plus grand que la résolution d'un convertisseur 8 bits. Il n'est donc pas utile d'avoir un convertisseur plus performant.*

5. Comparez votre résultat à la figure 3 de droite. En quoi notre caméra n'est elle pas parfaite ? *la courbe de droite est une droite dont la pente est reliée au bruit de photons par contre son abscisse à l'origine est non nulle* $var(0) = 0.253$*, la caméra présente un signal de sortie bruyant alors qu'elle ne voit pas de lumière ! c'est le bruit que rajoute la caméra. Ce bruit est relativement faible, il est masqué par le bruit de photons dès que l'intensité de la LED dépasse 7*.
6. Déduire la valeur de α. Combien de photons sont détectés dans chaque pixel quand l'éclairage vaut 100 (la caméra est alors presque saturée). *On a* $S(I) = a_S I = \alpha n$ *et* $var(S(I)) = a_v I = \alpha^2 n$ *et on en déduit que* $\alpha = a_v/a_S = 0.0364/1.707 = 0.0213$*. Par ailleurs, on a* $n = (a_S/\alpha).I$ *d'où* $n = 80.05 \times I$ *pour* $I = 100$ *chaque pixel reçoit 8005 photons. (Ce calcul ne tient pas compte du rendement quantique de la caméra)*.
7. A combien de photons par pixel correspond le bruit de la caméra (et par image). *comme le bruit de la caméra correspond à* $I = 7$*, son bruit est équivalent à 560 photons !*

4 Mesure de bruit par cross-corrélation

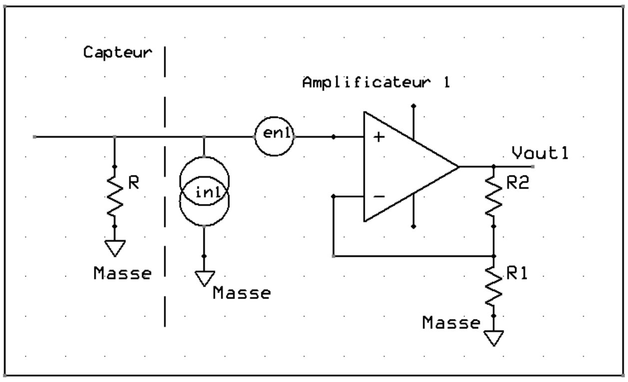

FIGURE 4 – *Schéma de principe de la mesure du bruit d'une résistance avec un amplificateur. Où* e_n *est le générateur de bruit en tension et* i_n *est le générateur de bruit en courant de l'amplificateur.*

On se propose de mesurer la température d'une résistance R à partir de son bruit. On connecte cette résistance à un amplificateur (Fig. 4). On a le choix entre : l' AD797, $e_n = 1nV/\sqrt{Hz}$ et $i_n = 5pA/\sqrt{Hz}$ et l'AD 745, $e_n = 3.2nV/\sqrt{Hz}$ et $i_n = 6.9fA/\sqrt{Hz}$. Notre capteur a une résistance $R = 400\Omega$. On rappelle qu'une résistance R génère un bruit $E_n^2(t) = 4.R.k_B T \Delta f$. soit $1.2nV/\sqrt{Hz}$ pour $R = 100\Omega$.

1. Quel amplificateur est le mieux adapté ? *Le AD 797.*
2. Justifier votre choix. *Bruit apporté par le AD797 :* $e_n^2 + R^2 i_n^2 = 1 + (400 \times 0.005)^2 nV^2/Hz = 5nV^2/Hz$*, Pour le AD745 :*$3.2^2 + (400 \times 6.910^{-6})^2 nV^2/Hz = 10.24nV^2/Hz$*. Attention il faut ajouter les puissances et pas les tensions ... !*
3. Quel bruit rajoute l'amplificateur ? $5nV^2/Hz$ *à comparer au bruit de la résistance qui est de* $4 \times 1.2^2 nV^2/Hz = 5.76nV^2/Hz$*. (Ceci correspond à* $2.4nV/\sqrt{Hz}$ *c'est la puissance du bruit qui est proportionnel à R, la tension de bruit est* $\propto \sqrt{R}$*).*

On désire améliorer cette mesure, pour ce faire on se propose d'utiliser deux amplificateurs de même type et de déterminer la cross-corrélation entre leurs signaux de sortie (Fig. 5).

1. Si nous moyennons le signal de cross-corrélation quelle contribution de bruit provient des amplificateurs ? *Les amplificateurs apportent deux contributions : une tension* e_n*, l'autre en courant* i_n*. Ces générateurs de bruits sont décorrélés donc la cross-corrélation* $< e_{n1}.e_{n2} > = 0$*, par contre le bruit de la résistance est le même dans les deux amplificateurs, la cross-corrélation le conserve. Les générateurs de bruit en courant sont décorrélés mais leur courants passent dans la résistance R. Ils se transforment en tensions de bruit corrélées pour les deux voies de mesure.*
2. A-t-on gagné quelque chose ? *Nous pouvons éliminer l'influence des générateurs de bruit de tension des amplificateurs mais pas celle des générateurs de courant.*
3. Quel amplificateur est le mieux adapté ? *La réponse est contenue dans la question, c'est AD 745.*
4. Justifier votre choix. *Comme nous éliminons le bruit en tension, le AD 745 est plus intéressant car son bruit en courant (que nous n'éliminons pas) est beaucoup plus faible que celui du AD797.*

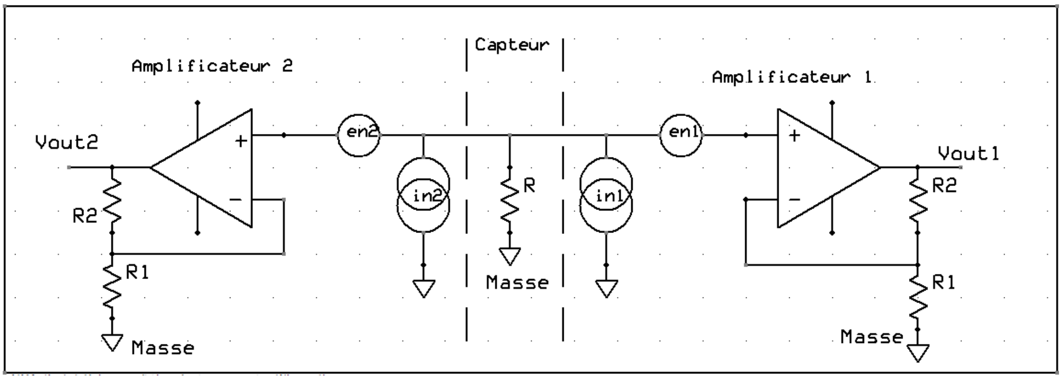

FIGURE 5 – *Schéma de principe de la mesure du bruit d'une résistance avec deux amplificateurs. Où* e_{n1} *et* e_{n2} *sont les générateurs de bruit en tension et* i_{n1} *et* i_{n2} *sont les générateurs de bruit en courant de l'amplificateur.*

5. Quelle est la température minimale que l'on peut mesurer ? *Il nous faut calculer le bruit apporté par les amplis :* $2 \times i_n^2 R^2 = 2 \times 6.9^2 \times 10^{-30} \times 400^2 = 15,23 \times 10^{-24} V^2/Hz$ *soit* $15.23 pV^2/Hz$ *à comparer à* $4k_B T R$ = $4 \times 1.2^2 10^{-18} T_m/300$ *ce qui donne* $T_m = (15.23/5.76)10^{-6} \times 300$ *d'où* $T_m = 0.8mK$. *(Ce résultat théorique est sûrement difficile à atteindre au niveau expérimental)*
6. Combien de moyennage doit on faire ? *Nous venons de voir qu'il faut mesurer une tension de bruit de* $15.23pV^2/Hz$ *ou* $3.9pV/\sqrt{Hz}$ *tandis que les tensions de bruit des amplificateurs atteignent* $e_{n1}^2 + e_{n2}^2 = 2 \times 3.2^2 nV^2/Hz$ *si nous moyennons* n *fois, la tension de bruit des amplificateurs est divisée par* $\sqrt{n}$. *Pour atteindre notre but nous devons faire* $n = (2 \times 3.2^2 nV^2/Hz)/(15.23pV^2/Hz) = 1.35 \times 10^6$. *C'est beaucoup !*