

# Examen

V. CROQUETTE

14 avril 2010 14h00, durée 2 heures

## Résumé

Les questions sont par ordre de difficulté croissante, n'hésitez pas à passer d'un groupe à l'autre.

## 1 Signaux réguliers et chaotiques

1. Quels conditions sont nécessaires pour qu'un système dynamique puisse être chaotique ? *Il faut que le système soit non-linéaire et qu'il possède au moins 2 degrés de liberté.*
2. Le fait que la lune nous présente toujours la même face est-il la conséquence de la linéarité des équations de son mouvement ? *Non, c'est la conséquence d'un accrochage qui est un phénomène non-linéaire.*
3. Un oscillateur à un degré de liberté non-linéaire forcé par une perturbation sinusoïdale peut-il être chaotique ? *Oui, le forçage correspond à le coupler à un second oscillateur.*
4. Comment caractérise-t-on la sensibilité aux conditions initiales ? *par la divergence exponentielle entre deux CI voisines. Celle-ci fait intervenir un temps caractéristique.*
5. A quoi correspond un attracteur étrange ? *A la trajectoire chaotique d'un système dynamique dans l'espace des phases, il est caractérisé en général par une dimension fractale.*

## 2 Sensibilité d'un microphone

On se propose de déterminer la sensibilité ultime d'un microphone à condensateur type électret.

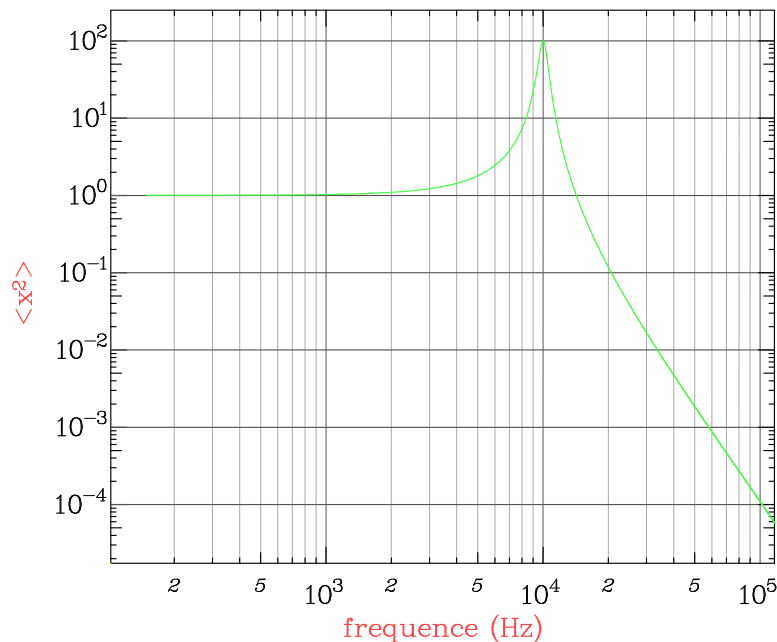


FIGURE 1 – Spectre des déplacements de la membrane d'un microphone en fonction de la fréquence d'excitation sur des échelles log-log. On remarque que le microphone présente une fréquence de résonance à 10kHz.

Ce dispositif se comporte comme un condensateur fait d'une fine membrane de téflon métallisée du côté extérieur tendue en face d'une seconde électrode fixe. Dans cette membrane des charges électriques sont piégées dans le téflon entre les deux électrodes, elles assurent un champ électrique équivalent à celui obtenu par une tension continue de 100

Volts sur ce condensateur. Lorsqu'une onde acoustique frappe la membrane, celle-ci vibre ce qui module la capacité du condensateur et induit une variation de charge sur les électrodes et donc une variation de potentiel.

Nous supposons que le condensateur a une épaisseur  $e$  de 10 microns et qu'une vibration d'amplitude  $\delta x$  de sa membrane induit une modulation de tension électrique  $\delta V = V_0 \cdot \delta x / e$  où  $V_0 = 100V$ .

La membrane du microphone peut être modélisée par un oscillateur harmonique.

$$kx(t) + \gamma \dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = F(t) \quad (1)$$

Si on enregistre le signal électrique fourni par le microphone tandis qu'on lui applique une onde acoustique d'intensité constante mais de fréquence variable, on obtient le spectre de la figure 1. La membrane présente une résonance marquée à 10 kHz ou l'amplitude d'oscillation présente une surtension 10 fois plus grande que la réponse à basse fréquence.

On simplifie le mouvement de la membrane en supposant qu'elle se déplace comme un piston. En prenant une densité de 1.5 pour le teflon et un rayon de 2 mm pour la membrane circulaire de 10 microns d'épaisseur calculez :

## 2.1 La réponse linéaire

1. la masse de la membrane.  $m = \rho v = \rho \cdot \pi r^2 e = 1.5 * 10^3 * \pi * 4 * 10^{-6} * 10^{-5} = 18.8510^{-8} kg$ .
2. la raideur de la membrane à partir de la fréquence de résonance de 10 kHz. De  $\omega_r^2 = k/m$  on a  $k = m\omega_r^2$   
 $k = 1.885 \times 10^{-7} \times 4\pi^2 \times 10^8, k = 744 N/m$ .
3. déterminez le coefficient de frottement  $\gamma$  à l'aide d'un calcul approché. (On utilisera le fait que l'amplitude de vibration est 10 fois plus grande à la résonance qu'à basse fréquence). *A basse fréquence on a  $\tilde{x}(0) = F/k$ , à la résonance on a  $\tilde{x}(\omega_r) = F/(i\omega_r \gamma)$ . Par ailleurs,  $\tilde{x}(\omega_r)/\tilde{x}(0) \approx 10$ , on en déduit que  $\gamma = k/(10 \times \omega_r)$  soit  $\gamma = 744/(10 \times 2\pi \times 10^4) = 1.18 \times 10^{-3} NS/m$ .*

## 2.2 Le théorème fluctuation dissipation

En utilisant le théorème fluctuation dissipation dont on rappelle ici le principal résultat quantitatif :  $F_L^2 = 4 \cdot k_B T A \Delta f$  où  $k_B T = 4.1 \times 10^{-21} joules$  (à température ambiante) et  $A$  représente le coefficient de dissipation du système.

1. Quel est le(s) terme(s) de l'équation 1 responsable des fluctuations spontanées de la membrane ? *le terme de dissipation  $\gamma$ .*
2. On modélise ces fluctuations par une force de Langevin  $F_L$ , à quoi correspond cette force ? *A une force aléatoire représentant la moyenne des chocs des molécules sur la membrane. Cette force fluctue très rapidement son temps de corrélation est nul. En Fourier ceci conduit au fait que  $\tilde{F}$  est indépendant de la fréquence, c'est un bruit blanc.*
3. Que représente le terme  $\Delta f$  ? *La bande passante sur laquelle on observe le bruit*
4. Calculez  $F_L$  pour notre microphone pour une bande passante de 1Hz ?  $F_L = \sqrt{4k_B T \gamma \Delta f} = 4,407 \times 10^{-12} N \sqrt{Hz}$ .
5. A quelles fluctuations de déplacements de la membrane cela correspond ?  $\delta x = F_L/k = 5,92 \times 10^{-15} m \sqrt{Hz}$
6. A quelles fluctuations électriques correspondent les fluctuations spontanées de la membrane ?  $\delta V = V_0 \times \delta x / e = \delta x / 1000 = 5,92 \times 10^{-8} V \sqrt{Hz}$ .
7. Proposez une méthode pour prouver expérimentalement que ces fluctuations sont induites par les molécules du gaz présent dans le microphone. *En faisant le vide dans une enceinte contenant le microphone, on doit observer que  $\gamma$  et ces fluctuations diminuent. Si ce n'est pas le cas d'autres frottements sont responsables de la dissipation du mouvement de la membrane et ils limitent la sensibilité.*

## 2.3 Le bruit de l'amplificateur de mesure

Le microphone se comporte comme un générateur avec une impédance de sortie équivalente à un condensateur d'environ 10 pF. Il faut lui associer un amplificateur pour transmettre le signal électrique généré par les vibrations de la membrane. Il faut aussi ajouter une grande résistance  $R$  en parallèle avec ce condensateur pour laisser passer le courant de polarisation de l'amplificateur.

1. Quel filtre forme la résistance  $R$  en parallèle avec le condensateur du microphone  $C$  ? *Un filtre RC, pour les vibrations acoustiques, c'est le condensateur qui est la source du signal tandis que la résistance  $R$  vient atténuer ce signal. Comme l'impédance de sortie du microphone est donnée par le condensateur, le signal sera atténué à basse fréquence. Pour le bruit thermique de la résistance ce sera l'inverse*
2. Comme on souhaite que le microphone reproduise des fréquences acoustiques supérieures à 15 Hz, calculez la valeur de la résistance  $R$  ?  $\omega = 1/RC$  soit  $R = 1/C\omega$  d'où  $R = 1/(10^{-11} \times 2\pi \times 15) = 10^9 \Omega$ .

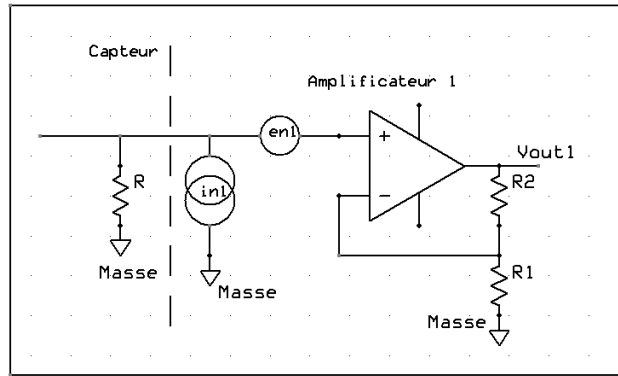


FIGURE 2 – Schéma de principe de l'amplificateur utilisé pour adapter le signal du microphone.  $e_n$  est le générateur de bruit en tension et  $i_n$  est le générateur de bruit en courant de l'amplificateur.  $R$  est une grande résistance servant à laisser passer le courant de polarisation de l'amplificateur.

- Le bruit thermique de cette résistance vient s'ajouter aux fluctuations précédentes, calculez le bruit provoqué par cette résistance.  $e_R = \sqrt{4k_B T R \Delta f} = \sqrt{4 \times 4.1 \times 10^{-21} \times 10^9} = 4.05 \times 10^{-6} V \sqrt{Hz}$ .
- Indiquez l'effet du condensateur  $C = 10pF$  en parallèle sur cette résistance. *Le condensateur va filtrer le bruit de la résistance à partir de 15Hz.*
- Tracez qualitativement sur une échelle log-log le niveau de bruit du microphone combinant le bruit intrinsèque et celui de la résistance associée au condensateur. *Voir la figure 3.*

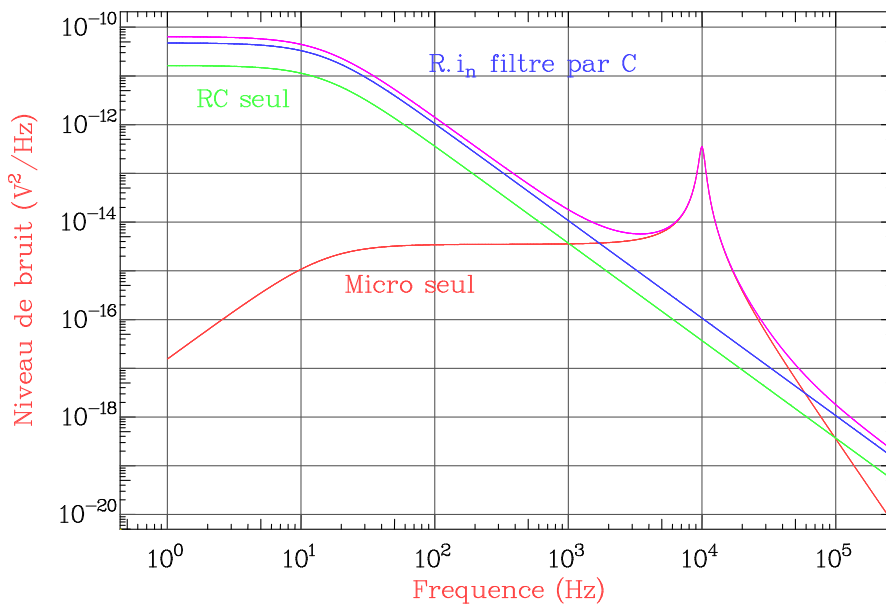


FIGURE 3 – Spectre des différentes contributions au bruit du microphone : en rouge le bruit intrinsèque du microphone, en vert le bruit du à la résistance  $R$  de polarisation filtré par le condensateur  $C$  du microphone, en bleu le bruit de courant de l'amplificateur passant dans la résistance  $R$ , en magenta le bruit total.

- Quel bruit domine et à quelle fréquence ? *Le bruit de la résistance domine largement à basse fréquence. Le bruit intrinsèque du microphone n'apparaît qu'au delà de 1kHz.*

L'amplificateur opérationnel est un AD 745 avec  $e_n = 3.2nV/\sqrt{Hz}$  et  $i_n = 6.9fA/\sqrt{Hz}$ .

- Estimez la contribution de l'amplificateur dans le bruit total. *Le bruit de tension de l'amplificateur  $e_n 3.2nV/\sqrt{Hz}$  est complètement négligeable devant le bruit de courant passant dans la résistance  $R. i_n = 6.9 \times 10^{-6} V/\sqrt{Hz}$ .*
- Tracez qualitativement sur une échelle log-log le niveau de bruit du microphone combinant son bruit intrinsèque, celui de la résistance associée au condensateur et celui de l'amplificateur. *Voir la figure 2.*
- Quel bruit domine et à quelle fréquence ? *Le bruit de courant de l'amplificateur passant dans la résistance domine largement à basse fréquence, le bruit intrinsèque du microphone n'apparaît qu'au delà de 3kHz.*

## 2.4 Retour sur le théorème de l'équipartition

1. Rappelez cette relation.  $1/2k\delta x^2 = 1/2k_B T$
2. Quel niveau de fluctuations prédit elle ?  $\delta x^2 = k_B T/k = 4.1/744 \times 10^{-21}$  soit  $\delta x = 2.35 \times 10^{-12} m$  ce qui correspond à  $23.5 \times 10^{-6} V/\sqrt{Hz}$  au niveau du signal électrique.
3. Comment cela se compare à ce que vous avez trouvé avec le théorème fluctuation dissipation ? *c'est beaucoup plus grand car cette relation intègre les fluctuations sur toutes les fréquences.*

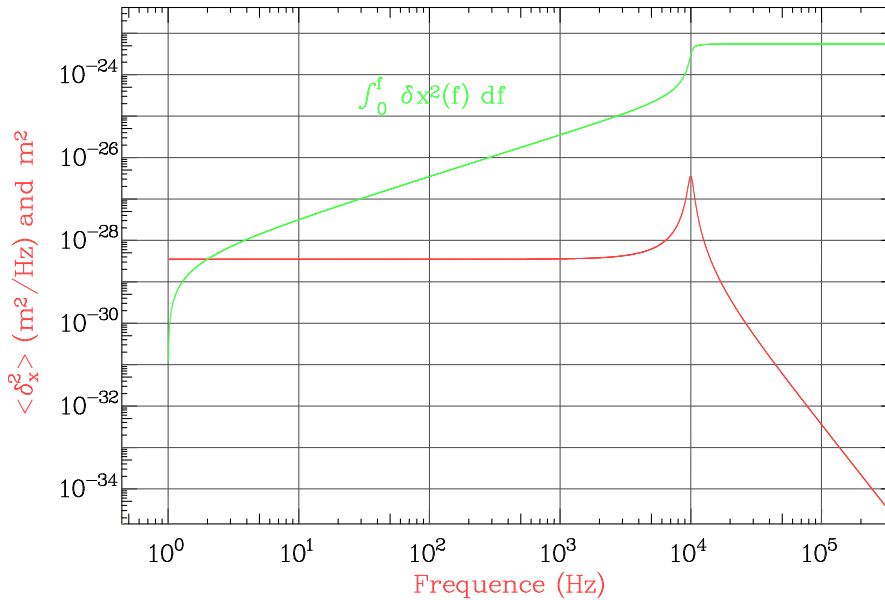


FIGURE 4 – *Spectre des fluctuations du microphone et de leur intégration en fonction de la fréquence. Attention nous avons porté le carré des fluctuations.*

4. A votre avis dans quel domaine de fréquence se retrouve la majorité de ces fluctuations ? *Sur la figure 4, nous avons reproduit en rouge la densité de fluctuation  $\tilde{x}_n(f)$  de la membrane du microphone en fonction de la fréquence. En vert, nous avons intégré la courbe précédente de 0 jusqu'à  $f : \int_0^f \tilde{x}_n(f) df$ , à hautes fréquences, cette intégration correspond au résultat du théorème de l'équipartition. La courbe verte présente une marche importante à la fréquence de résonance de la membrane. Ceci nous montre que ce sont essentiellement ces fluctuations près de la résonance qui contribuent à l'essentiel de l'énergie des fluctuations thermiques. Cette situation est liée à la résonance assez marquée de la membrane (facteur de qualité 10).*